PROBLEMA 1

$H_0: \mu = 30$ $\quad N(\mu, 10)$ $\quad n = 25$

$H_1: \mu = 40$

Si $\bar{x} \leq 35$ se acepta H_0

R.C: Si $\bar{x} > 35$ se rechaza H_0

(A) $\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar } H_0/H_0) = P(\bar{x} > 35/H_0)$

$\hookrightarrow \bar{x} \sim N(30, \frac{10}{\sqrt{25}}) = N(30, 2)$

$P(\bar{x} > 35) = P(\bar{x}^* > \frac{35-30}{2}) = P(\bar{x}^* > 2'5) = 0'0062$

(B) $\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{aceptar } H_0/H_1) = P(\bar{x} \leq 35/H_1)$

$\hookrightarrow \bar{x} \sim N(40, 2)$

$P(\bar{x} \leq 35) = P(\bar{x}^* \leq \frac{35-40}{2}) = P(\bar{x}^* \leq -2'5) = P(\bar{x}^* \geq 2'5) = 0'0062$

(C) Si se realiza $\frac{L_0}{L_1} \leq K$ para determinar la RC se llega a:

R.C: si $\bar{x} \geq K^*$ se rechaza H_0

si $\bar{x} < K^*$ se acepta H_0.

Por tanto:

$\alpha = P(\text{rechazar } H_0/H_0) = P(\bar{x} \geq K^*/H_0) = 0'01$

$\hookrightarrow \bar{x} \sim N(30, 2)$

$P(\bar{x}^* \geq \frac{K^*-30}{2}) = 0'01 \overset{\text{tablas}}{\Rightarrow} \frac{K^*-30}{2} = 2'33 \Rightarrow K^* = 34'66$

Por tanto la R.C. es $\bar{x} \geq 34'66$

La potencia será:

$\eta = 1-\beta = P(\text{rechazar } H_0/H_1) = P(\bar{x} \geq 34'66/H_1)$

$\hookrightarrow \bar{x} \sim N(40, 2)$

$P(\bar{x} \geq 34'66) = P(\bar{x}^* \geq \frac{34'66-40}{2}) = P(\bar{x}^* \geq -2'67) = 1 - P(\bar{x}^* \geq 2'67) = 0'9962$

PROBLEMA 2

$H_0: \lambda = 10 \qquad n = 100 \qquad \alpha = 0'1$

$H_1: \lambda = 40$

(A) Si se realiza $\frac{L_0}{L_1} \leq k$ para determinar la mejor R.C. se obtiene:

RC: si $\bar{x} \geq K^*$ se rechaza H_0

si $\bar{x} < K^*$ se acepta H_0

Calculamos K^*

$\alpha = P(\bar{x} \geq K^* / H_0)$

T.C.L. $\rightarrow \bar{x} \sim N\left(10, \sqrt{\frac{10}{100}}\right) = N(10, 0'316)$

$P(\bar{x} \geq K^*) = 0'10 \Rightarrow P\left(\bar{x}^* \geq \frac{K^* - 10}{0'316}\right) = 0'10 \overset{\text{tablas}}{\Rightarrow} \frac{K^* - 10}{0'316} = 1'28$

$\Rightarrow K^* = 10'404$

Por tanto la R.C. vendrá dada por:

R.C.: si $\bar{x} \geq 10'404$ se rechaza H_0

si $\bar{x} < 10'404$ se acepta H_0

(B) $\eta = 1 - \beta = P(\bar{x} \geq 10'404 / H_1)$

T.C.L. $\rightarrow \bar{x} \sim N\left(40, \sqrt{\frac{40}{100}}\right) = N(40, 0'632)$

$P(\bar{x} \geq 10'404) = P\left(\bar{x}^* \geq \frac{10'404 - 40}{0'632}\right) = P(\bar{x}^* \geq -46'83) = 1$

PROBLEMA 3

$H_0: \theta = 1$ $\quad n=1$ $\quad \alpha = 0'1$

$H_1: \theta = 5$

(A) Si se realiza $\frac{L_0}{L_1} \leq K$ para determinar la mejor R.C. se obtiene:

RC: si $x \leq K^*$ se rechaza H_0

si $x > K^*$ se acepta H_0

Calculamos K^*

$$\alpha = P(x \leq K^*/H_0) = \int_0^{K^*} e^{-x}dx = 0'1 \Rightarrow K^* = -\ln 0'90 = 0'105$$

Por tanto la R.C vendrá dada por:

RC: si $x \leq 0'105$ se rechaza H_0

si $x > 0'105$ se acepta H_0

(B) $$\eta = 1-\beta = P(x \leq 0'105/H_1) = \int_0^{0'105} 5e^{-5x}dx = 1-e^{-0'525} = 0'408$$

(C) Como $x = 2'5 > 0'105$ se acepta $H_0: \theta = 1$

PROBLEMA 4

$H_0: \sigma^2 = 16$ $\quad n=10$ $\quad \alpha = 0'1$ $\quad N(0,\sigma)$

$H_1: \sigma^2 = 4$

(A) Si se realiza $\frac{L_0}{L_1} \leq K$ para determinar la mejor R.C. se obtiene:

RC: si $\sum x_i^2 \leq K^*$ se rechaza H_0

si $\sum x_i^2 > K^*$ se acepta H_0

Cálculo de K^*

$$\alpha = P\left(\sum x_i^2 \le K^* / H_0\right) = 0'1$$

Como $x_i \sim N(0, \sigma=4)$ bajo H_0 entonces $\frac{x_i}{4} \sim N(0,1)$ y

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{x_i}{4}\right)^2 = \frac{\sum x_i^2}{16} \sim \chi^2_{10} \text{ (Suma de } N(0,1) \text{ al cuadrado)}$$

Por tanto:

$$P\left(\sum x_i^2 \le K^*\right) = P\left(\frac{\sum x_i^2}{16} \le \frac{K^*}{16}\right) = P\left(\chi^2_{10} \le \frac{K^*}{16}\right) = 0'1$$

$$P\left(\chi^2_{10} \ge \frac{K^*}{16}\right) = 0'9 \overset{\text{tablas}}{\Rightarrow} \frac{K^*}{16} = 4'865 \Rightarrow K^* = 77'84$$

Por tanto la R.C. viene dada por:

R.C: si $\sum x_i^2 \le 77'84$ se rechaza H_0

si $\sum x_i^2 > 77'84$ se acepta H_0

(B) $\eta = 1 - \beta = P\left(\sum x_i^2 \le 77'84 / H_1\right)$

Como $x_i \sim N(0, \sigma=2)$ bajo H_1 entonces $\frac{x_i}{2} \sim N(0,1)$ y

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{x_i}{2}\right)^2 = \frac{\sum x_i^2}{4} \sim \chi^2_{10}$$

Por tanto:

$$P\left(\sum x_i^2 \le 77'84\right) = P\left(\frac{\sum x_i^2}{4} \le \frac{77'84}{4}\right) = P\left(\chi^2_{10} \le 19'46\right) =$$

$$1 - P\left(\chi^2_{10} > 19'46\right) \simeq 1 - 0'025 = 0'975$$

$\hookrightarrow$ Exacto $= 1 - 0'035 = 0'965$

(C) Según la m.a.s suministrada $\sum x_i^2 = 12'4743 < 77'84$ y por tanto se rechaza H_0.

PROBLEMA 5

$H_0: \theta = 1$ $\quad n=1 \quad \alpha = 0'10 \quad f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad x>0, \theta>0$

$H_1: \theta > 1$

(A) Si realizamos $\frac{L_0}{L} \leq k$ para determinar la mejor R.C. se obtiene:

$(\theta - \theta_0)x \leq k$ y como $\theta > \theta_0 = 1$ entonces la

R.C. vendrá dada por:

R.C: si $x \leq k^*$ se rechaza H_0

si $x > k^*$ se acepta H_0

Cálculo de k^*:

$$\alpha = P(x \leq k^*/H_0) = 0'10 \Rightarrow P(x \leq k^*/H_0) = \int_0^{k^*} e^{-x} dx = 0'10 \Rightarrow k^* = 0'1054$$

Por tanto la R.C. es:

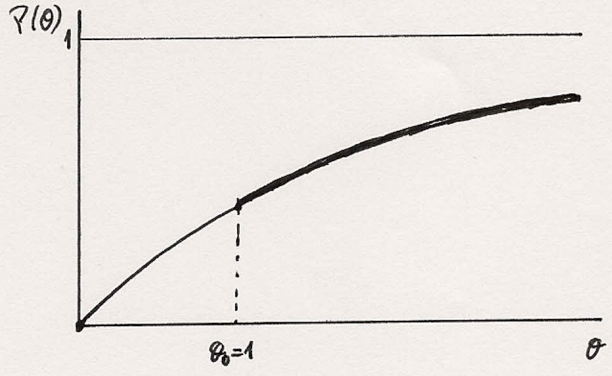
R.C: si $x \leq 0'1054$ se rechaza H_0

si $x > 0'1054$ se acepta H_0

(B) $P(\theta) = P(\text{rechazar } H_0) = P(x \leq 0'1054) = \int_0^{0'1054} \theta \cdot e^{-\theta x} dx = 1 - e^{-0'1054 \cdot \theta}$

¿Es el contraste insesgado?

Para cualquier valor de $\theta > 1$ (H_1) se obtiene siempre una f. de potencia mayor que $\alpha = 0'10$ ya que esta f. de potencia es siempre creciente ($P'(\theta) = \theta e^{-0'1054 \cdot \theta} > 0$). Gráficamente:



$\alpha = P(\theta_0) < P(\theta)$ con $\theta > 1$ (H_1)