PROBLEMA 1

(A) $E(\bar{x}) = \mu = \frac{a+b}{2} = 2$

(B) $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ donde $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$

$$V(\bar{x}) = \frac{4/3}{3.600} = \frac{4}{10.800}$$

(C) A partir del Teorema Central del Límite se llega a:

$$\bar{x} \sim N\left(2, \sqrt{\frac{4}{10.800}}\right) = N(2, 0'0192)$$

PROBLEMA 2

(A) $E(x_1) = \mu$ $\quad V(x_1) = \sigma^2$ (Se distribuye igual que la población)

(B) $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ y $V(\xi) = \sigma^2 \Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} \leq \sigma^2$ (Serán iguales si $n=1$)

PROBLEMA 3

Población: $\xi \sim N(5, 0'1)$ $\quad n = 16$

$$\bar{x} \sim N\left(5, \frac{0'1}{4}\right) = N(5, 0'025)$$

(A) $P(5 < \bar{x} < 5'2) = P\left(\frac{5-5}{0'025} < \bar{x}^* < \frac{5'2-5}{0'025}\right) = P(0 < \bar{x}^* < 8) =$

$$P(\bar{x}^* > 0) - P(\bar{x}^* > 8) = 0'5 - 0 = 0'5$$

(B) $P(S^2 < 0'023) = P\left(\frac{n \cdot S^2}{\sigma^2} < \frac{n \cdot 0'023}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2_{15} < \frac{16 \cdot 0'023}{0'1^2}\right) =$

$$= P(\chi^2_{15} < 36'8) = 1 - P(\chi^2_{15} > 36'8) = 0'999$$

PROBLEMA 4

1º Muestreo aleatorio con reemplazamiento (m.a.s.)

Muestras posibles ($n=2$)	$\bar{x}$
0,0	0
0,1	0'5
0,2	1
1,0	0'5
1,1	1
1,2	1'5
2,0	1
2,1	1'5
2,2	2

Por tanto los valores que puede tomar $\bar{x}$ son:

0, 0'5, 1, 1'5, 2

Calculemos sus probabilidades:

$P(\bar{x}=0) = P(1^a b\, 0 \cap 2^a b\, 0) = P(1^a b\, 0) \cdot P(2^a b\, 0) = 0'3 \cdot 0'3 = 0'09$

$P(\bar{x}=0'5) = P(1^a b\, 0 \cap 2^a b\, 1) \cup P(1^a b\, 1 \cap 2^a b\, 0) = (0'3 \cdot 0'5) + (0'5 \cdot 0'3) = 0'30$

$P(\bar{x}=1) = P(1^a b\, 0 \cap 2^a b\, 2) \cup P(1^a b\, 1 \cap 2^a b\, 1) \cup P(1^a b\, 2 \cap 2^a b\, 0) =$

$(0'3 \cdot 0'2) + (0'5 \cdot 0'5) + (0'2 \cdot 0'3) = 0'37$

$P(\bar{x}=1'5) = P(1^a b\, 1 \cap 2^a b\, 2) \cup P(1^a b\, 2 \cap 2^a b\, 1) = (0'5 \cdot 0'2) + (0'2 \cdot 0'5) = 0'20$

$P(\bar{x}=2) = P(1^a b\, 2 \cap 2^a b\, 2) = 0'2 \cdot 0'2 = 0'04$

Es decir:

$\bar{x}=\bar{x}_i$	$P(\bar{x}=\bar{x}_i)$
0	0'09
0'5	0'30
1	0'37
1'5	0'20
2	0'04

Por tanto:

$$E(\bar{x}) = 0 \cdot 0'09 + 0'5 \cdot 0'30 + 1 \cdot 0'37 + 1'5 \cdot 0'20 + 2 \cdot 0'04 = 0'9$$

$$E(\bar{x}^2) = 0^2 \cdot 0'09 + 0'5^2 \cdot 0'30 + 1^2 \cdot 0'37 + 1'5^2 \cdot 0'20 + 2^2 \cdot 0'04 = 1'055$$

$$V(\bar{x}) = 1'055 - 0'9^2 = 0'245$$

Vemos que la esperanza de la media muestral $(E(\bar{x}))$ coincide con la media de la población (μ):

$$\mu = E(Y) = 0 \cdot 0'3 + 1 \cdot 0'5 + 2 \cdot 0'2 = 0'9 = E(\bar{x})$$

También se puede ver que la varianza de la media muestral $(V(\bar{x}))$ es igual a la varianza poblacional dividido entre el tamaño de la muestra:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2$$

$$\alpha_2 = 0^2 \cdot 0'3 + 1^2 \cdot 0'5 + 2^2 \cdot 0'2 = 1'3$$

$$\sigma^2 = 1'3 - 0'9^2 = 0'49$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0'49}{2} = 0'245$$

2º) Muestreo aleatorio sin reemplazamiento (m.a.):

Los valores que puede tomar $\bar{x}$ son los mismos que en el caso anterior, lo que varían son las probabilidades:

$$P(\bar{x}=0) = P(1^a b0 \cap 2^a b0) = P(1^a b0) \cdot P(2^a b0 / 1^a b0) = 0'3 \cdot \frac{29}{99} = 0'088$$

$$P(\bar{x}=0'5) = 0'3 \cdot \frac{50}{99} + 0'5 \cdot \frac{30}{99} = 0'303$$

$$P(\bar{x}=1) = 0'3 \cdot \frac{20}{99} + 0'5 \cdot \frac{49}{99} + 0'2 \cdot \frac{30}{99} = 0'369$$

$P(\bar{x}=1'5) = 0'5 \cdot \frac{20}{99} + 0'2 \cdot \frac{50}{99} = 0'202$

$P(\bar{x}=2) = 0'2 \cdot \frac{19}{99} = 0'038$

Es decir:

$\bar{x}=\bar{x}_i$	$P(\bar{x}=\bar{x}_i)$
0	0'088
0'5	0'303
1	0'369
1'5	0'202
2	0'038

Por tanto:

$E(\bar{x}) = 0 \cdot 0'088 + 0'5 \cdot 0'303 + 1 \cdot 0'369 + 1'5 \cdot 0'202 + 2 \cdot 0'038 = 0'9 = \mu$

$V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - 0'9^2 \Rightarrow E(\bar{x}^2) = 0^2 \cdot 0'088 + 0'5^2 \, 0'303 + 1^2 \cdot 0'369 + 1'5^2 \cdot 0'202 + 2^2 \cdot 0'038 = 1'0513$

$V(\bar{x}) = 1'0513 - 0'9^2 = 0'2413 \neq \frac{\sigma^2}{n} = 0'245$

La esperanza de la media muestral coincide con la media poblacional, pero la varianza de la media muestral no coincide con $\frac{\sigma^2}{n}$ ya que, en este caso, los elementos muestrales no son independientes.

PROBLEMA 5

(A) $P(18'72 < \bar{x} < 25'76) =$

$\hookrightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(23, \frac{6}{\sqrt{9}}) = N(23, 2)$

$= P\left(\frac{18'72-23}{2} < \bar{x}^* < \frac{25'76-23}{2}\right) = P(-2'14 < \bar{x}^* < 1'38) = 0'9$

(B) $P(S^2 > 60'12) = P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} > \frac{n \cdot 60'12}{\sigma^2}\right) = P(\chi^2_8 > 15'03) \simeq 0'05$

(C) $P(S_1^2 > K) = 0'95 \Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)K}{\sigma^2}\right) = 0'95 \Rightarrow$

$P\left(\chi^2_8 > \frac{8 \cdot K}{36}\right) = 0'95 \xrightarrow{\text{tablas}} \frac{8K}{36} = 2'733 \Rightarrow K = 12'2985$

(D) $P(\bar{x} > 25'79) = P\left(\frac{(\bar{x}-23)\sqrt{9}}{\sqrt{\frac{9 \cdot 4'5^2}{8}}} > \frac{(25'79-23)\sqrt{9}}{\sqrt{\frac{9 \cdot 4'5^2}{8}}}\right) =$

$= P(t_8 > 1'75) \simeq 0'05$

PROBLEMA 6

$\mu = \frac{a+b}{2} = 8000$ $\quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = 1.333333$ $\quad \sigma = 1154'7$

$P(\bar{x} > 8100) =$

T.C.L. $\hookrightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(8000, \frac{1154'7}{\sqrt{320}}) = N(8000, 64'55)$

$P\left(\bar{x}^* > \frac{8100-8000}{64'55}\right) = P(\bar{x}^* > 1'55) = 0'0606$

PROBLEMA 7

$\xi \sim U[0,1] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a} = 1 \quad y \quad F(x) = x \qquad n=5$

$P(u_5 \leq 0'1) = \int_0^{0'1} g(u_5)\, du_5$

$\underset{\text{MÁXIMO}}{\downarrow}$

$g(u_5) = 5 \cdot f(u_5) \cdot [F(u_5)]^{5-1} = 5 \cdot 1 \cdot [u_5]^4 = 5 \cdot u_5^4$

$P(u_5 \leq 0'1) = \int_0^{0'1} 5 \cdot u_5^4\, du_5 = 5 \cdot \left[\frac{u_5^5}{5}\right]_0^{0'1} = 0'00001$